Лекция 3. Применение фундаментальных законов природы (продолжение)

Пример 5. Моделирование колебания колец Сатурна

(Применение Закона Всемирного тяготения).

Рассмотрим модель движения точечной массы $\mathbf{M_0}$ в поле сил тяготения кольца Сатурна (рис.1).

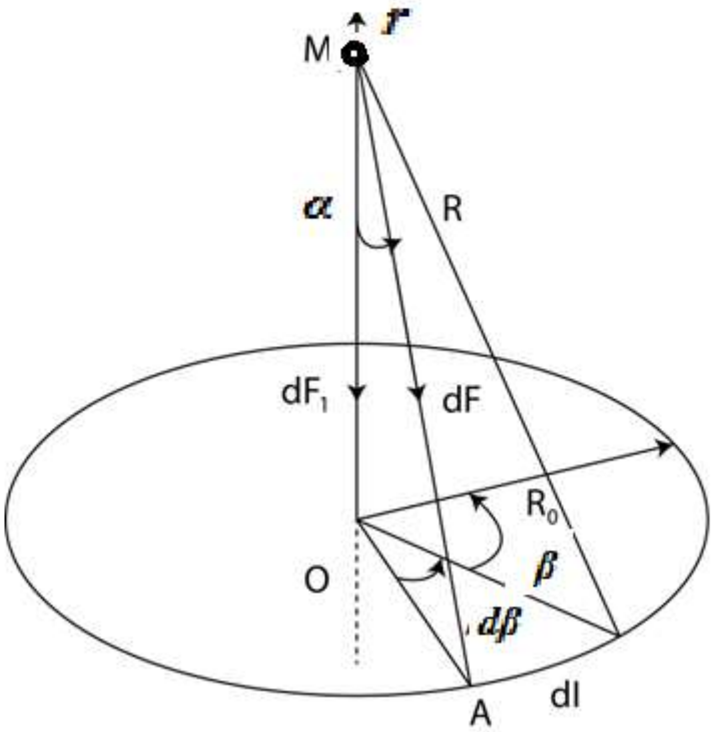

Рисунок 1. - Схема притяжения точечной массы $\mathbf{M_0}$ к кольцу Сатурна

Известны:

- Радиус кольца Сатурна $\mathbf{R_0}$
- Линейная плотность кольца Сатурна $\boldsymbol{\rho_0}$ (масса тела на единицу длины).

Полагаем :

- кольцо очень тонким. Поэтому принимаем его за окружность с радиусом $\mathbf{R_0}$ **(**$\mathbf{R_0}$ >> толщины кольца**)**
- движение точечной массы $\mathbf{M_0}$ происходит вдоль оси кольца **Or.**

Обозначим через $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ расстояния от точечной массы $\mathbf{M_0}$ до кольца и его центра, соответственно (см. рис.1).

Несмотря на упрощения, нельзя использовать **Закон Всемирного тяготения:**

$\mathbf{F} = \gamma \frac{m_0 m_1}{r^2}$, так как массы m_0, m_1 - точечные, а мы не можем моделировать кольцо Сатурна как точечную массу.

Для использования закона Всемирного тяготения будем рассматривать дискретное представление кольца в виде малой дуги длиной dl и массой dm, которую можно рассматривать как точку.

Поэтому сначала вычислим силу притяжения точечного элемента массой $\mathbf{M_0}$ и малого элемента кольца Сатурна длиной dl и массой dm. Обозначим эту силу $\mathbf{dF}$:

$$\mathbf{dF} = \gamma \frac{\mathbf{M_0 dm}}{\mathbf{R}^2} \tag{1}$$

Так как $dm = \rho_0\, dl = \rho_0\, R_0 \sin d\beta = \rho_0 R_0\, d\beta$, (2)

то подставив (2) в (1), получаем величину силы притяжения $\mathbf{dF}$ в зависимости от параметров рассматриваемой системы:

$$dF = \gamma \frac{M_0\, \rho_0\, R_0\, d\beta}{R^2}. \tag{3}$$

Используя следующие тригонометрические зависимости:

$\mathbf{sin\alpha} = \frac{\mathbf{R_0}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R_0}}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{R_0}^2}}$, $\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{R_0}^2}}$,

а таже $\mathbf{tg\alpha} = \frac{\mathbf{R_0}}{\mathbf{r}}$, откуда следует $R_0 = r\, tg\alpha$.

Подставляя $R_0 = rtg\alpha$ в (3), соотношение (3) представим следующим образом:

$$dF = \gamma \frac{M_0\, \rho_0\, r\ \ tg\alpha\, d\beta}{R^2}. \tag{4}$$

Силу притяжения dF можно разложить ***на вертикальную и горизонтальную составляющие.***

Нас интересует вертикальная составляющая dF_1, вызывающая перемещение точечной массы M_0 вдоль оси кольца **r(t).**

Величина вертикальной составляющей силы притяжения есть:

$$dF_1 = dF\ cos\alpha = \gamma \frac{M_0\ \rho_0\ R_0\ r\ sin\alpha\ d\beta}{R^2}. \qquad (5)$$

Таким образом, выражение (5) определяет величину вертикальной составляющей силы притяжения точечной массы M_0 к бесконечно малому элементу кольца dl.

Полная же сила F притяжения точечной массы M_0 к кольцу Сатурна есть сумма всех дискретных сил притяжения dF, действующих по всей длине кольца. Она определяется путем интегрирования выражения (5) по углу β, от 0 до 2π.

Суммарная величина горизонтальной составляющей силы *F* равна нулю в силу симметрии кольца Сатурна. То есть каждой горизонтальной составляющей есть ее противоположно направленная сила.

Таким же образом находим вертикальную составляющую результирующей силы притяжения F_1 путем суммирования всех dF_1:

$$F_1 = \int_0^{2\pi} \gamma \frac{M_0\ \rho_0\ R_0\ r\ sin\alpha}{R^2}\ d\beta = \gamma \frac{M_0\ M_1\ r}{(r^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (6)$$

M_1 - масса кольца Сатурна.

Сила тяготения (6) существенно отличается от известного закона Всемирного тяготения.

<u>Рассмотрим предельные случаи соотношения (6):</u>

1) $r >> R_0$, тогда $F_1 = \gamma \frac{M_0 M_1}{r^2}$ ***есть известный закон Всемирного тяготения.*** В этом случае кольца Сатурна рассматриваются как точечная масса.

2) $r << R_0$, тогда $F_1 = \gamma \frac{M_0 M_1 r}{R_0^{\,3}}$. В этом случае **в противоположность закону Всемирного тяготения** ***сила тяготения*** F_1 ***уменьшается с уменьшением расстояния между притягиваемыми объектами.***

Применяя к массе M_0 второй закон Ньютона, получаем уравнение ее колебаний вдоль оси O**r**:

$$F = M_0 a,$$

$$M_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = \gamma \frac{M_0 M_1 r}{(r^2 + R_0^{\,2})^{\frac{3}{2}}} \qquad \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \gamma \frac{M_1 r}{(r^2 + R_0^{\,2})^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

Закон колебаний (7) носит нелинейный характер и обусловлен **нелинейностью используемого здесь фундаментального закона природы – закона Всемирного тяготения.**

Полученная нелинейная модель (7) **может быть линеаризована** допущением $r << R_0$. В результате чего она представляется как:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \gamma \frac{M_1 r}{R_0^{\,3}}. \tag{8}$$

<u>Пример 6.</u> Моделирование всплытия подводной лодки

(применение нескольких фундаментальных законов природы)

Дано: На глубине **H** (рис.2)**, подводная лодка** совершает прямолинейное горизонтальное движение с постоянной скоростью v.

$\rho_Л$ - объемная плотность подводной лодки,

$\rho_в$ - плотность воды.

Рассматривается всплытие подводной лодки с глубины **H.**

Необходимо определить:

- траекторию движения подводной лодки при ее всплытии
- время, необходимое для полного всплытия
- дальность всплытия лодки от ее залегания.

Всплытие лодки осуществляется за счет освобождения ее отсеков от воды, нагнетенной ранее. После чего отсеки заполняются воздухом, и средняя объемная плотность подводной лодки $\rho_Л$ становится меньше плотности воды $\rho_в$.

В результате чего на лодку начинает действовать выталкивающая сила Архимеда F_A. Она равна весу вытесненной объемом лодки воды:

$$F_A = gV\rho_в, \qquad (1)$$

где V - объем подводной лодки.

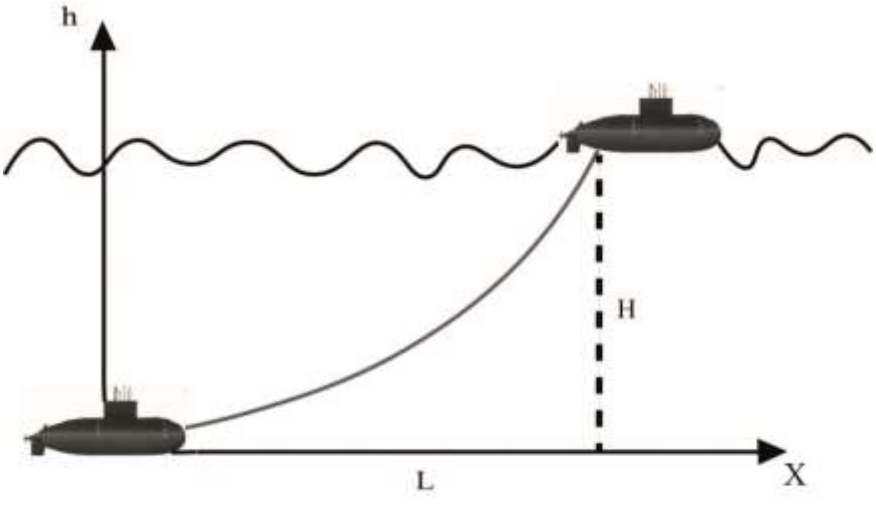

Рисунок 2 – Схема всплытия подводной лодки

Предполагается, что промежуток времени Δt, необходимый для освобождения отсеков от воды и нагнетания их воздухом, считается малым. Поэтому считаем, что в момент времени $t = 0$ на лодку начинают одновременно действовать выталкивающая сила Архимеда F_A, а так же сила тяжести лодки P :

$$P = mg = \rho_Л V g, \tag{2}$$

m - масса подводной лодки.

Результирующая сила F, действующая на подводную лодку, направлена вверх и равна:

$$F = F_A - P = gV(\rho_в - \rho_Л) \tag{3}$$

Эта сила сообщает подводной лодке вертикальное ускорение a. Используя второй закон Ньютона:

$$ma = F, \tag{4}$$

можно записать следующее соотношение:

$$\rho_л V \frac{d^2h}{dt^2} = gV(\rho_в - \rho_л), \tag{5}$$

$h(t)$- глубина залегания подводной лодки в текущий момент времени **t**.

Задавая начальные условия для дифференциального уравнения (5):

$$h(0) = 0; \quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

и решая его, определяем величину глубина залегания подводной лодки в текущий момент времени **t**. То есть дважды интегрируем (5) с учетом (6):

$$\frac{dh}{dt} = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{\rho_л} t + C_1 \tag{7.а}$$

$$h = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{2\rho_л} t^2 + C_1 t + C_2 \qquad (7.б)$$

Постоянные интегрирования C_1 **и** C_2 находятся из начальных условий (задача Коши):

При

$$t = 0 \quad \frac{dh}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{\rho_л} * 0 + C_1 = 0 \quad \longrightarrow C_1 = 0.$$

$$t = 0 \quad h\big|_{t=0} = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{2\rho_л} * 0 + 0 * 0 + C_2 = 0 \quad \longrightarrow C_2 = 0.$$

Отсюда следует: $$h(t) = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{2\rho_л} t^2 \qquad (8)$$

Согласно (8), можно определить время $t_{кр}$, необходимое подводной лодке для полного всплытия, когда $h(t)$=**H**.

То есть $$h(t) = H = \frac{g(\rho_в - \rho_л)}{2\rho_л} t_{кр}^2 \qquad (9)$$

Отсюда следует, что время полного всплытия подводной лодки есть величина:

$$t_{кр} = \left(\frac{2H\rho_л}{g(\rho_в - \rho_л)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

Можно также определить расстояние L, характеризующее положение подводной лодки в момент ее всплытия в сравнении с ее исходным положением (перед началом всплытия).

Для этого необходимо вспомнить, что во время всплытия лодка также продолжала двигаться в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $v = \frac{dl}{dt} = const$, где $l(t)$ – характеризует горизонтальное положение лодки.

Отсюда $l(t)=vt$. Тогда L определяем как:

$$L = vt_{кр} = v\left(\frac{2H\rho_Л}{g(\rho_в - \rho_Л)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Используя в (8) величину времени $t=\frac{l}{v}$, получаем модель всплытия подводной лодки:

$$h(t) = \frac{g(\rho_в - \rho_Л)}{2\rho_Л v^2} l^2 \tag{12}$$

Данная математическая модель носит нелинейный характер и представлена параболическим законом изменения глубины залегания подводной лодки $h(t)$ в зависимости ее горизонтального отклонения от первоначального состояния $l(t)$ с вершиной в точке $l=0;\ \ h=0$.

Т.о., **модель (12) построена с использованием нескольких фундаментальных законов.** Для простоты и наглядности методики построения динамической модели при ее создании были проведены соответствующие упрощения и допущения.